

ECUAȚIILE REȚELELOR ELECTRICE ÎN REGIM STAȚIONAR

CURS 10

Primul pas în analiza rețelelor electrice constă în formularea modelului matematic, care trebuie să descrie particularitățile și caracteristicile elementelor componente de sistem și relațiile care guvernează interconectarea acestor elemente.

10.1 Matricele de incidență

Analiza topologică a rețelelor electrice are la bază teoria grafurilor unde laturile sunt asociate laturilor rețelei, iar nodurile nodurilor rețelei.

Incidența este o noțiune care înlocuiește și precizează noțiunea de asociere dintre elementele de bază ale grafului, noduri și laturi:

- *o latură este incidentă la un nod* atunci când nodul este o extremitate a laturii - este pozitivă sau negativă, după cum nodul este extremitatea inițială sau finală a laturii;
- *o latură este incidentă la un ciclu* atunci când latura face parte din ciclu - este pozitivă sau negativă, după cum orientarea laturii corespunde sau nu cu orientarea ciclului;
- *o latură este incidentă la o secționare* atunci când latura face parte din secționare - este pozitivă sau negativă, după cum orientarea corespunde sau nu cu orientarea secționării.

10.1.1. Matricea de incidență noduri – laturi sau matricea de incidență a nodurilor, $[A_0]$

Se numește matrice de incidență nodală completă și se notează cu $[A_0]$. Este matricea de bază, care conține toate informațiile referitoare la caracteristicile topologice ale grafului. Nodurile grafului se asociază cu liniile matricei, iar laturile grafului cu coloanele matricei. Termenii matricei sunt $+1$, -1 , sau 0 , după cum latura de pe coloană și nodul de pe linie sunt incidente pozitiv, negativ sau nu sunt incidente. Ea are proprietatea că suma termenilor de pe fiecare coloană este egală cu zero. Se poate elimina un nod numit nod de referință notat de obicei cu zero. Celelalte noduri se numesc noduri independente.

Matricea de incidență redusă obținută din $[A_0]$ prin eliminarea unui nod se numește matricea de incidență a laturilor cu nodurile independente și se notează cu $[A]$. Dimensiunea acestei matrice este $(n-1) \times l$, unde l este numărul de laturi al grafului. Pentru graful din figura 10.2, care corespunde schemei din figura 10.1, linie continuă s-au marcat ramurile și cu linie întreruptă coardele. Se obține:

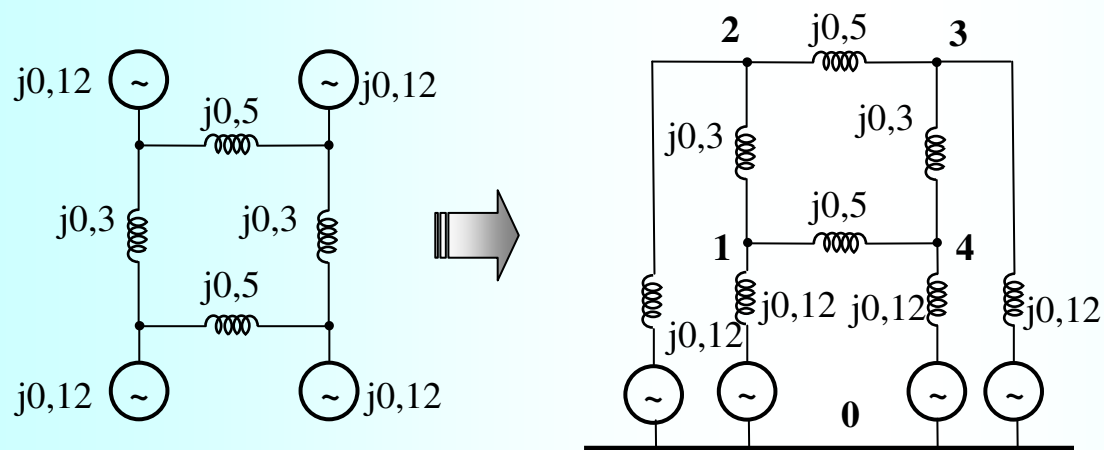


Fig.10.1. Schemă echivalentă monofază a unei rețele buclate

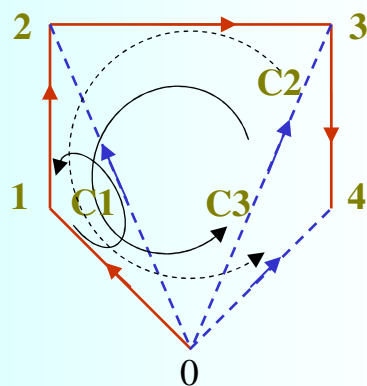


Fig.10.2. Graful asociat rețelei din figura 8.1.

$$[A_0] =$$

	0-1	1-2	2-3	3-4		0-2	0-3	0-4
0	1	0	0	0		1	0	1
1	-1	1	0	0		0	0	0
2	0	-1	1	0		-1	0	0
3	0	0	-1	1		0	-1	0
4	0	0	0	-1		0	0	-1

$$[A] =$$

	0-1	1-2	2-3	3-4		0-2	0-3	0-4
1	-1	1	0	0		0	0	0
2	0	-1	1	0		-1	0	0
3	0	0	-1	1		0	-1	0
4	0	0	0	-1		0	0	-1

Matricea $[A]$ este singulară. Se poate partiționa în două submatrice A_1 și A_2 corespunzător partiționării laturilor în laturi arbore (ramuri) și laturi coarde:

$$[A] =$$

ramuri		coarde
A_1		A_2

10.1.2 Matricea de incidență a laturilor cu ciclurile independente, [B]

Ciclurile independente se asociază cu liniile matricei, iar laturile grafului cu coloanele matricei. Termenii matricei sunt:

- $b_{ij} = 1$, dacă latura de pe coloană și ciclul de pe linie sunt incidente pozitiv;
- $b_{ij} = -1$, dacă latura de pe coloană și ciclul de pe linie sunt incidente negativ;
- $b_{ij} = 0$, dacă latura de pe coloană și ciclul de pe linie nu sunt incidente.

Matricea de incidență a laturilor cu ciclurile independente este de dimensiunea $c \times l$; unde $c = l - n + 1$ este numărul de coarde sau cicluri independente (un ciclu independent are orientarea singurei coarde pe care o conține).

Pentru scrierea acestei matrice este absolut necesar să se aleagă arborele grafului, dar nu este necesar să se precizeze nodul de referință. Pentru graful din figura 8.2 se obține:

		0-1	1-2	2-3	3-4		0-2	0-3	0-4
[B]=	C1	-1	-1	0	0		1	0	0
	C2	-1	-1	-1	-1		0	0	1
	C3	-1	-1	-1	0		0	1	0

Matricea $[B]$ se poate partiționa în două submatrice $[B_1]$ și $[U_2]$, corespunzător partiționării laturilor în laturi arbore r și laturi coarde c . Matricea $[B]$ partiționată este:

[B]=	ramuri		coarde
	B_1		U_2

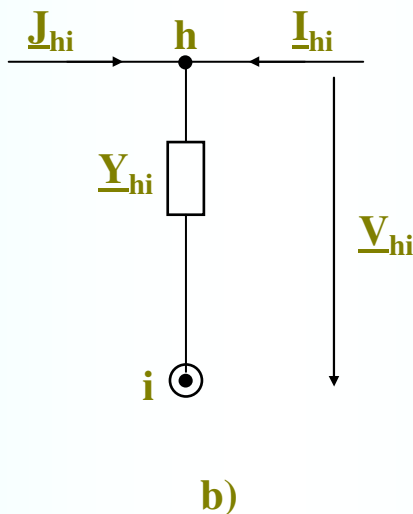
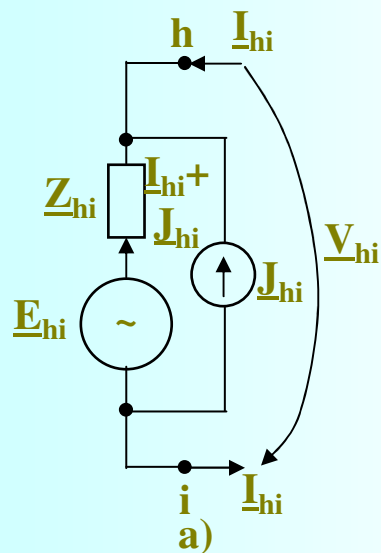
Matricea B este o matrice singulară. Submatricea B_1 este în general singulară de dimensiunea $c \times r$. U_2 este o matrice unitate de dimensiunea $c \times c$.

10.2. Ecuațiile de material

Elementul component al rețelei – latura – poate fi reprezentat prin schema echivalentă a unei laturi elementare, sau prin schema echivalentă a unui nod elementar, așa cum este arătat în figura 8.3. Mărimile de stare electrică și parametrii schemei echivalente sunt:

- \underline{V}_{hi} este tensiunea la bornele laturii h-i;
- \underline{I}_{hi} – curentul care intră în latura h-i;
- \underline{E}_{hi} – tensiunea electromotoare din latură;
- \underline{J}_{hi} – curentul debitat de sursa de curent din latură;
- \underline{Z}_{hi} – impedanța proprie a laturii h-i;
- \underline{Y}_{hi} – admitanța proprie a laturii h-i.

Curenții din laturi și tensiunile la bornele laturilor reprezintă variabilele ecuațiilor de funcționare. Ecuațiile de funcționare ale unei laturi reprezentată sub forma impedanță sunt:



Ecuatiile de funcționare ale unei laturi reprezentată sub forma impedanță sunt:

$$\underline{Z}_{hi} (\underline{I}_{hi} + \underline{J}_{hi}) = \underline{V}_{hi} + \underline{E}_{hi}$$

iar sub forma de admitanță este:

$$\underline{Y}_{hi} (\underline{V}_{hi} + \underline{E}_{hi}) = \underline{I}_{hi} + \underline{J}_{hi}$$

Fig.10.3. Schema echivalentă a unui nod elementar:

a – cu impedanțe; b- cu admitanțe.

Scrise pentru toate laturile rețelei iau forma matriceală:

$$[\underline{Z}][\underline{I}] + [\underline{J}] = [\underline{V}] + [\underline{E}]$$

$$[\underline{Y}][\underline{V}] + [\underline{E}] = [\underline{I}] + [\underline{J}]$$

- $[Z]$ este matricea de impedanță a laturilor; este o matrice pătrată de dimensiunea $l \times l$, unde l este numărul laturilor. Matricea $[Z]$ nu depinde de schema de conexiuni, adică de proprietățile topologice ale schemei de conexiuni;

- $[Y]=[Z]^{-1}$ – matricea de admitanță a laturilor;

- $[V]$ – matrice coloană, $l \times 1$, cu liniile aranjate în ordinea laturilor.

Termenii matricei sunt tensiunile de la bornele laturilor;

- $[E]$ – matrice coloană, $l \times 1$ cu liniile aranjate în ordinea laturilor.

Termenii matricei sunt t.e.m. din laturi, luate cu semnul + sau – după cum sensul tensiunii corespunde sau nu cu sensul de orientare a laturii;

- $[I]$ – matrice coloană $l \times 1$ cu rândurile aranjate în ordinea laturilor.

Termenii matricei sunt curenții care intră în laturi;

- $[J]$ – matrice coloană, $l \times 1$ cu liniile aranjate în ordinea laturilor.

Termenii ei sunt curenții debitați de sursele de curent din laturi.

10.3. Sistemul de referință nodal. Metoda potențialelor la noduri

Pe baza teoremei I a lui Kirchhoff și a proprietăților matricei $[A]$:

$$\begin{aligned}[A] \cdot [\underline{I}] &= \mathbf{0} \Rightarrow [A] \cdot [\underline{Y}] \cdot [\underline{V}] = [A]([\underline{J}] - [\underline{Y}] \cdot [\underline{E}]) \\ [A] \cdot [\underline{Y}] \cdot [A]^T \cdot [\underline{V}_n] &= [A]([\underline{J}] - [\underline{Y}] \cdot [\underline{E}]) \quad \text{cu} \quad [\underline{V}] = [A]^T \cdot [\underline{V}_n] \\ [\underline{Y}_{nn}] &= [A] \cdot [\underline{Y}] \cdot [A]^T; \quad [\underline{J}_n] = [A][\underline{J}]; \quad [\underline{J}_{scn}] = -[\underline{Y}] \cdot [\underline{E}] = -[\underline{Z}]^{-1} \cdot [\underline{E}] \\ [\underline{I}_n] &= [\underline{Y}_{nn}] \cdot [\underline{V}_n] = [\underline{J}_n] + [\underline{J}_{scn}]\end{aligned}$$

- $[\underline{Y}_{nn}]$ este matricea de admitanță nodală, $(n-1) \times (n-1)$;
- $[\underline{V}_n]$ – matricea coloană a potențialelor nodurilor independente în raport cu nodul de referință, orientate de la nodurile independente spre nodul de referință;

- $[\underline{J}_n]$ - matrice coloană, $(n-1) \times 1$; termenii matricei \underline{J}_i sunt egali cu suma curenților injectați de sursele de curent din nodurile n_i ;
- $[\underline{J}_{scn}]$ - matrice coloană, $(n-1) \times 1$; termenii matricei \underline{J}_{sci} reprezintă curentul de scurtcircuit din latură luat cu semn schimbat.

Ecuția care reprezintă metoda potențialelor la noduri:

$$[\underline{V}_n] = [\underline{Y}_{nn}]^{-1} \{ [\underline{I}_n] + [\underline{J}_n] \}$$

Termenii matricei de incidență noduri laturi:

$$Y_{ii} = \sum_j y_{ij}$$

- termenii diagonali sunt egali cu suma admitanțelor laturilor incidente la nodul i .
- termenul nediagonal, $\underline{Y}_{ik} = \underline{Y}_{ki}$, este egal cu admitanța dintre nodul i și k luată cu semn schimbat.

8.4. Sistemul de referință al ochiurilor independente. Metoda curenților ciclici

Pe baza legii a doua a lui Kirchhoff și a proprietăților matricei $[B]$ se scriu ecuațiile elementului de rețea sub forma:

$$\begin{aligned}
 [B] \cdot [V] &= 0; \quad [B] \cdot [Z] \cdot [I] = [B]([E] - [Z] \cdot [J]); \\
 [B] \cdot [Z] \cdot [B]^T \cdot [I_c] &= [E_c] + [V_c]; \\
 [Z_{cc}] &= [B] \cdot [Z] \cdot [B]^T; \quad [E_c] = [B] \cdot [E]; \quad [V_c] = -[B] \cdot [Z] \cdot [J]; \\
 [Z_{cc}] \cdot [I_c] &= [E_c] + [V_c];
 \end{aligned}$$

- $[Z_{cc}]$ este matricea impedanțelor ochiurilor independente, de dimensiunea $C \times C$; termenii Z_{ii} de pe diagonala matricei sunt egali cu sumele impedanțelor laturilor incidente la ciclurile C_i ; iar termenii $Z_{ik} = Z_{ki}$ sunt egali cu sumele impedanțelor laturilor comune perechilor de cicluri C_i și C_k . Impedanțele $Z_{ik} = Z_{ki}$ se introduc în matrice cu semnul + sau -, după cum corespund sau nu sensurile curenților ciclici (de coardă) din laturile comune;

- $[E_c]$ – matrice coloană, $C \times 1$, a sumei algebrice a tensiunilor electromotoare de contur;

- $[V_c]$ – matrice coloană, $C \times 1$, a sumei căderilor de tensiune din laturile ochiurilor independente;

- $[I_c]$ – matrice coloană, $C \times 1$, a curenților ochiurilor independente (curenții din laturile coardă).

Ecuatia care reprezintă metoda curenților ciclici:

$$[I_c] = [Z_{cc}]^{-1} (E_c + V_c)$$

Aplicatia 10.1. Se cere calculul curenților (pu) în regim permanent simetric pentru rețeaua de mai jos.

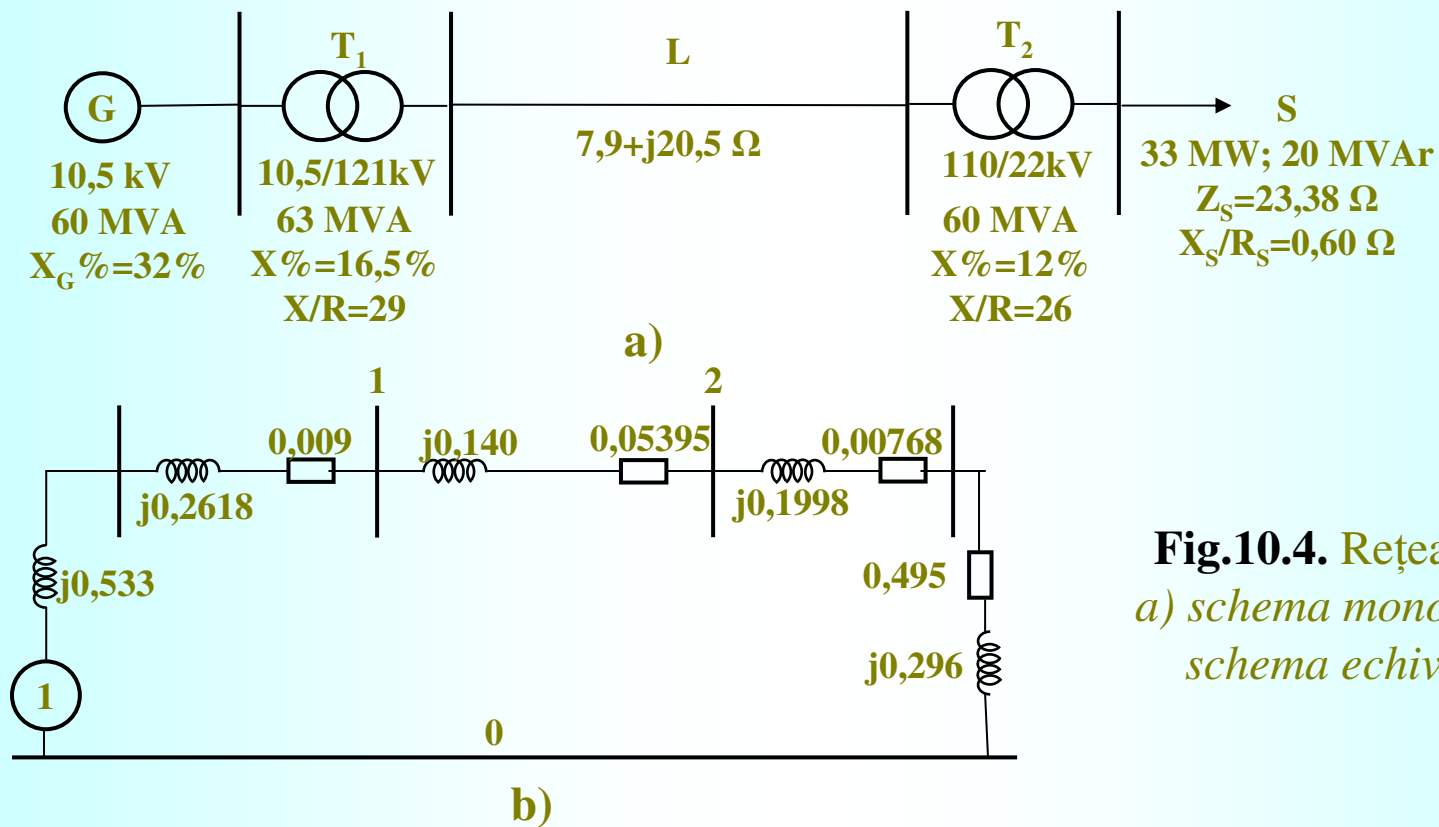


Fig.10.4. Rețea radială:
a) schema monofilară; b)
schema echivalentă.

Soluție:

1. Se scrie matricea $[A]$ de incidență noduri/laturi, matricea $[Y]$ a impedanțelor laturilor și a curenților de scurtcircuit la bornele laturilor $[J]$:

$$[A] = \begin{array}{c|ccc} & 1-2 & 0-2 & 0-1 \\ \hline 1 & +1 & 0 & -1 \\ \hline 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}$$

$$[J] = \begin{array}{c|c} & -E \cdot Y \\ \hline 1-2 & 0 \\ \hline 0-2 & 0 \\ \hline 0-1 & -1 \cdot (0,01424 - j1,258) \end{array}$$

$$[Y] = \begin{array}{c|ccc} & 1-2 & 0-2 & 0-1 \\ \hline 1-2 & 2,40 - j6,22 & 0 & 0 \\ \hline 0-2 & 0 & 1,0 - j0,9945 & 0 \\ \hline 0-1 & 0 & 0 & 0,01424 - j1,258 \end{array}$$

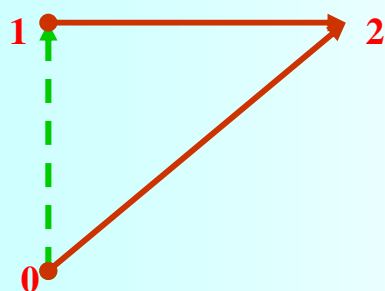


Fig.10.5. Graful rețelei.

2. Se calculează matricea admitanțelor nodurilor $[Y_{nn}]$, matricea curenților injectați în noduri $[J_n]$:

$$\begin{aligned}
 [Y_{nn}] &= [A] \cdot [Y] \cdot [A]^T = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2,40 - j6,22 & 0 & 0 \\ 0 & 1,0 - j0,9945 & 0 \\ 0 & 0 & 0,01424 - j1,258 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 2,41424 - j7,478 & -2,4 + j6,22 \\ -2,4 + j6,22 & 3,4 - j7,2145 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$[J_n] = [A] \cdot [J] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \cdot (0,01424 - j1,258) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,01424 - j1,258 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3. Se calculează matricea potențialelor nodurilor $[V_n]$:

$$[V_n] = [Y_{nn}]^{-1} \cdot [J_n] = \begin{bmatrix} 0,150 + j0,41 & 0,150 + j0,333 \\ 0,150 + j0,333 & 0,198 + j0,381 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,01424 - j1,258 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,518 - j0,182 \\ 0,420 - j0,183 \end{bmatrix}$$

4. Se calculează curenții în laturi:

$$\begin{aligned} I_{0-1,pu} = I_{1-2,pu} = I_{0-2,pu} = I_{pu} &= (1 - V_1)Y_{0-1} = (0,482 + j0,182)(0,01424 - j1,258) = \\ &= (V_1 - V_2)Y_{1-2} = (0,098 + j0,001)(0,24 - j6,22) = V_2 \cdot Y_{0-2} = \\ &= (0,42 - j0,183)(1,0 - j0,9945) \approx 0,236 - j0,61 \end{aligned}$$

$$I_{pu} = \sqrt{0,236^2 + 0,61^2} \approx 0,65$$